

IV. POSLOUPNOSTI A ŘADY

1. Bukaz matematickou indukci

Příklady

① Ukládá hodnoty funkce $f(m) = m^2 + m + 17$ pro $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ a vypočítá hypotézu o těchto hodnotách a dalších $m \in \mathbb{N}$.

$$f(1) = 1^2 + 1 + 17 = 19$$

$$f(5) = 5^2 + 5 + 17 = 25 + 22 = 47$$

$$f(2) = 2^2 + 2 + 17 = 23$$

$$f(6) = 6^2 + 6 + 14 - 36 + 23 = 59$$

$$f(3) = 3^2 + 3 + 17 = 29$$

$$f(7) = 7^2 + 7 + 17 = 49 + 24 = 73$$

$$f(4) = 4^2 + 4 + 17 = 37$$

•

HYPOTÉZA (DOMNĚNKA) $\forall m \in \mathbb{N}: m^2 + m + 17$ je prvočíslo

- mislimo je dokazao po ψ MEN, nebo nupatim (maš' talik' i j'rad, kač nupatim)

pro $n=17$: $f(17) = 17^2 + 17 + 17 = 17 \cdot (17 + 1 + 1) = 17 \cdot 19 = 7 \cdot f(17)$ není
prvočíslo (prvočíslo: dělitelné pouze 2 - 1 a číslu samo)

$\Rightarrow$ HYPOTÉZA JE VYVRÁCENA, NEPLATÍ

DŮKAZY VĚT TYPU: $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_0: V(m)$ dokazujeme matem. indukcí
 $m_0 \in \mathbb{N}$ dané, pokud dok. pro $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow m_0 = 1$

PRINCIP DŮKAZU MATEMATICKOU INDUKCÍ

- má 2 kroky, každý měří vydech

1. dokážeme, že $V(r)$ platí pro $m=m_0$ (často 1)

2. dokážeme pre $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m_0$: jistlivé platí $V(k)$, pak platí $V(k+1)$

② Vypočítejte hypotézu pro součet prvních n lichých čísel a dokažte ji

$$S_m = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2m-1$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1. Reihe 2. Reihe 3. Reihe 4. Reihe m. Reihe
 2.2-1 2.3-1 2.4-1 $2m-1$

$$A_7 = 1$$

$$A_2 = 1 + 3 = 4$$

$$A_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$A_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

...

$$S_m = 1 + 3 + 5 + \dots + 2m-1 = m^2 \text{ HYPOTÉZA}$$

HYPOTÉZA: $\Delta_m = n^2$, Δ_f :

$$\forall n \in \mathbb{N}: 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

otvori

- liča' cila: $(2k-1), k \in \mathbb{N}$ nebo $(2k+1), k \in \mathbb{N}_0$
- suča' cila: $2k, k \in \mathbb{N}$

důkaz matem. indukce: $\forall m \in \mathbb{N}: 1+3+5+\dots+2m-1 = m^2$

1. dok., že věta platí pro $m = m_0 = 1$ $L=1$ $P=1^2=1$ $L=P$ tedy $V(1)$ platí

2. dok., že pro $\forall k \in \mathbb{N} (k \geq m_0)$ platí:

podléh. platí $V(k)$, tj. je-li $m=k$, tj:

$$1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2$$

předp., že $V(k)$ platí

pak platí $V(k+1)$, tj:

$$1+3+5+\dots+(2k-1) + [2(k+1)-1] = \underbrace{\hspace{10em}}_L = \underbrace{(k+1)^2}_P$$

dok., že $V(k+1)$ platí

$$L = \underbrace{1+3+5+\dots+2k-1}_{= k^2 \text{ (z } V(k))} + 2k+1 = k^2 + 2k+1 = (k+1)^2 = P \text{ čld.}$$

závěr: věta platí

③ Dokažte

a) $\forall m \in \mathbb{N}: 2+4+6+\dots+2m = m(m+1)$ [součet m sudých př. č.]

1. dok. pro $m_0 = 1$ $L=2$ $P=1(1+1)=2$ $L=P$ $V(1)$ platí

2. dok., že pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m_0$ platí

je-li $m=k$, tj. $2+4+6+\dots+2k = k(k+1)$,

předp., že $V(k)$ platí,

pak pro $m=k+1$ je $2+4+6+\dots+2k+2(k+1) = (k+1)(k+2)$

$[k+1]+1$

dok., že $V(k+1)$ pl.

$$L = \underbrace{2+4+6+\dots+2k}_{k(k+1)} + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) \underset{\text{vytknutí}}{=} (k+1)(k+2) = P \text{ čld.}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{nebo} \\ k^2 + k + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2) \\ \text{nebo} \\ L = k^2 + 3k + 2 \quad P = (k+1)(k+2) = k^2 + 3k + 2 \quad L=P \end{array} \right]$$

b) $\forall m \in \mathbb{N}: 1+2+3+\dots+m = \frac{m}{2}(m+1)$ [součet m př. č.]

1. dok. pro $m_0 = 1$ $L=1$ $P=\frac{1}{2}(1+1)=1$ $L=P$ $V(1)$ pl.

2. dok. pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$:

je-li $m=k$, tj. $1+2+3+\dots+k = \frac{k}{2}(k+1)$

předp., že $V(k)$ pl.

pak pro $m=k+1$ by mělo platit

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \underbrace{\hspace{10em}}_L = \underbrace{\frac{k+1}{2}[(k+1)+1]}_P$$

$$L = 1+2+3+\dots+k+k+1 = \frac{k}{2}(k+1) + k+1 = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = P \text{ čld.}$$

$$b) \forall m \in \mathbb{N}: 1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$1. m=1 \quad L=1^2=1 \quad P=\frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6}=1 \quad L=P \quad V(1) \text{ pl.}$$

2. dok., že pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ platí:

$$\text{předpokládáme, že } V(k) \text{ platí, tj.: } 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

předp., že $V(k)$ pl.

pak platí $V(k+1)$, tj.:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \underbrace{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}_L + \underbrace{(k+1)^2}_P = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

dok., že $V(k+1)$ pl.

$$\begin{aligned} L &= 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \end{aligned}$$

$$P = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = L \quad \text{dod.}$$

$$c) \forall m \in \mathbb{N}: 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + m(m+1) = \frac{1}{3}m(m+1)(m+2)$$

$$1. \text{ dok. pro } m=1 \quad L=1 \cdot (1+1)=2 \quad P=\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = \frac{6}{3}=2 \quad L=P \quad V(1) \text{ pl.}$$

2. dok., že pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$:

předpokládáme, že $m=k$, tj.:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

předp., že $V(k)$ pl.

pak pro $m=k+1$ je

dok., že $V(k+1)$ pl.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \underbrace{\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)}_L + \underbrace{(k+1)(k+2)}_P = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$\begin{aligned} L &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \\ &= (k+1)(k+2) \left[\frac{1}{3}k + 1 \right] = (k+1)(k+2) \frac{1}{3}(k+3) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) = P \quad \text{dod.} \end{aligned}$$

$$d) \forall m \in \mathbb{N}: 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + m \cdot m! = (m+1)! - 1$$

$$1. m=1 \quad L=1 \cdot 1! = 1 \quad P=(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1 \quad L=P \quad V(1) \text{ pl.}$$

2. dok., že pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$:

$$\text{předpokládáme, že } V(k) \text{ platí, tj.: } 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$$

předp., že $V(k)$ pl.

$$\text{pak } V(k+1) \text{ platí, tj.: } 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! = \underbrace{(k+1)! - 1}_L + \underbrace{(k+1)(k+1)!}_P = (k+2)! - 1$$

$$\begin{aligned} L &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = \\ &= (k+1)! + (k+1)(k+1)! - 1 = (k+1)! [1 + k+1] - 1 = \\ &= (k+1)! (k+2) - 1 = (k+2)! - 1 = P \quad \text{dod.} \end{aligned}$$

④ dokážte, že

a) $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ $\frac{n}{n+1}$

1. pro $n_0 = 1$ $L = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ $P = 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $L = P$ $V(1)$ pl.

2. $\forall k \in \mathbb{N}: V(k) \Rightarrow V(k+1)$, tj:

- poslédku $V(k)$ platí, tj: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$ $\text{předp., že } V(k) \text{ pl.}$

pak pro $n = k+1$ by měla platit

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2}$ $\text{dok., že } V(k+1) \text{ pl.}$

$L = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$
 $= 1 + \frac{-(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = 1 + \frac{-k-1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2} = P$ čl.

problém se uplatňuje $\Rightarrow$ lze upravit p. stranu
 $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ $1 - \frac{1}{k+2} = \frac{k+2-1}{k+2} = \frac{k+1}{k+2}$
 $\Rightarrow L = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = P$

b) $\forall n \in \mathbb{N}: 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. $n=1$ $L = 1^2 = 1$ $P = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ $L = P$ $V(1)$ pl.

2. dok., že pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ platí:

poslédku platí $V(k)$, tj:

$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ $\text{předp., že } V(k) \text{ pl.}$

pak platí $V(k+1)$, tj:

$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)[2(k+1)+1]}{6}$ $\text{dok., že } V(k+1) \text{ pl.}$

$L = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} =$

$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$ $[\text{rozděl číselné} \\ \text{množ. m. k. rovnice. P. str.}]$

$P = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = L$

čl.

c) $\forall m \in \mathbb{N}: 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + m(m+1) = \frac{1}{3} m(m+1)(m+2)$

1. dok. pro $n=1$ $L = 1 \cdot (1+1) = 2$ $P = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = \frac{6}{3} = 2$ $L=P$ $V(1)$ pl.

2. dok., že pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$:

jestliže $n=k$, tj:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{1}{3} k(k+1)(k+2) \quad \text{předp., že } V(k) \text{ pl.}$$

pak pro $n=k+1$ je

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \underbrace{\frac{1}{3} k(k+1)(k+2)}_L + \underbrace{(k+1)(k+2)}_P = \frac{1}{3} (k+1)(k+2)(k+3) \quad \text{dok. } V(k+1)$$

$$\begin{aligned} L &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3} k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \\ &= (k+1)(k+2) \left[\frac{1}{3} k + 1 \right] = (k+1)(k+2) \frac{1}{3} (k+3) = \frac{1}{3} (k+1)(k+2)(k+3) = P \quad \text{obd.} \end{aligned}$$

d) $\forall m \in \mathbb{N}: 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + m \cdot m! = (m+1)! - 1$

1. pro $n=1$ $L = 1 \cdot 1! = 1$ $P = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$ $L=P$ $V(1)$ pl.

2. dok., že pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$:

jestliže platí $V(k)$, tj:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1 \quad \text{předp., že } V(k) \text{ pl.}$$

pak platí $V(k+1)$, tj:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! = (k+2)! - 1 \quad \text{dok., že } V(k+1) \text{ pl.}$$

$$\begin{aligned} L &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = \\ &= (k+1)! + (k+1)(k+1)! - 1 = (k+1)! (1 + k+1) = (k+1)! (k+2) - 1 = \\ &= (k+2)! - 1 = P \quad \text{obd.} \end{aligned}$$

⑤ Dokažte, že

a) $\forall m \in \mathbb{N}: 3 \mid (m^3 + 2m)$

$$\left[\begin{array}{l} 3 \text{ dělí } m^3 + 2m, \text{ tj. } m^3 + 2m \text{ je dělitelné } 3, \\ \text{ tj. } \exists c \in \mathbb{N}: m^3 + 2m = 3c \\ 3 \mid 12 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}: 12 = 3c \end{array} \right]$$

1. dok. pro $n=1$ $3 \mid (1^3 + 2 \cdot 1)$ $3 \mid 3$ pl. $V(1)$ pl.

2. $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

- předp., že $V(k)$ pl., tj. $3 \mid (k^3 + 2k)$, tj. $k^3 + 2k = 3u, u \in \mathbb{N}$ $\text{předp. } V(k) \text{ pl.}$

- dok., že $V(k+1)$ pl., tj. $3 \mid [(k+1)^3 + 2(k+1)]$, tj. $(k+1)^3 + 2(k+1) = 3v, v \in \mathbb{N}$ $\text{dok. } V(k+1)$

$$\begin{aligned} L &= (k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2(k+1) = \underbrace{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}_{(k^3 + 2k) + (3k^2 + k + 1)} + 2 = \\ &= 3u + 3k^2 + 3k + 3 = 3u + 3 \underbrace{(k^2 + k + 1)}_{u'} = 3(u + \underbrace{k^2 + k + 1}_{v \in \mathbb{N}}) = 3 \underbrace{(u + u')}_{v \in \mathbb{N}} \\ &= 3v \Rightarrow V(k+1) \text{ pl.} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array} \end{array} \right]$$

b) $\forall m \in \mathbb{N}: 6 | (m^3 + 11m)$

1. $m=1$ $6 | (1^3 + 11)$ $6 | 12$ pl.

$V(1)$ pl.

2. dok. pro $\forall k \in \mathbb{N}: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

pro $m=k$ je $V(k): 6 | (k^3 + 11k)$, tj. $\exists u \in \mathbb{N}$, k^{te} $k^3 + 11k = 6u$ předp. $V(k)$ pl.

pak pro $m=k+1$ je $V(k+1): 6 | [(k+1)^3 + 11(k+1)]$, tj. $\exists v \in \mathbb{N}: [(k+1)^3 + 11(k+1)] = 6v$

$L = (k+1)^3 + 11(k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 11k + 11 = 6u + 3k^2 + 3k + 12 =$ dok. $V(k+1)$ pl.

$= 6u + 6 \cdot 2 + 3k(k+1) = 6u + 6 \cdot 2 + 6u' = 6(u + 2 + u') = 6v = p$
 d^{le} 6 d^{le} 6 d^{le} 3 a k(k+1) d^{le} 2
 d^{le} 2 a 3
 $\Rightarrow$ d^{le} 6
 $n \in \mathbb{N}$ c^{et}l.

[$k(k+1) \dots$ součin 2 na neboh jedoucích p^{ri}v. č. p^{ri} d^{le} 2
 ob^oem: součin n na neboh jedoucích p^{ri}v. č. p^{ri} d^{le} n]

c) $\forall m \in \mathbb{N}: 6 | (m^3 + 5m)$

1. $m=1$ $6 | (1^3 + 5 \cdot 1)$ $6 | 6$

$V(1)$ pl.

2. dok., k^{te} pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$:

jestliže pro $m=k$ $6 | (k^3 + 5k)$, tj. $k^3 + 5k = 6u, u \in \mathbb{N}$. předp. $V(k)$ pl.

pak pro $m=k+1$ $6 | [(k+1)^3 + 5(k+1)]$, tj. $(k+1)^3 + 5(k+1) = 6v, v \in \mathbb{N}$ dok. k^{te} $V(k+1)$ pl.

$L = (k+1)^3 + 5(k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 5k + 5 = 6u + 3k^2 + 3k + 6 =$

$= 6u + 6 + 3k(k+1) = 6u' + 6u'' = 6v = p$
 d^{le} 6 d^{le} 3 a d^{le} 2
 (součin k(k+1) d^{le} 2)
 d^{le} 6
 $n \in \mathbb{N}$ c^{et}l.

⑥ dokážu, k^{te}

a) $\forall m \in \mathbb{N}: 3 | (4^m - 1)$

1. $m=1$ $3 | (4^1 - 1)$ $3 | 3$ pl.

$V(1)$ pl.

2. $\forall k \in \mathbb{N}: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

jestliže pro $m=k$ $3 | (4^k - 1)$, tj. $4^k - 1 = 3u, u \in \mathbb{N}$ předp. $V(k)$ pl.

pak pro $m=k+1$ $3 | (4^{k+1} - 1)$, tj. $4^{k+1} - 1 = 3v, v \in \mathbb{N}$ dok., k^{te} $V(k+1)$ pl.

$L = 4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 4 \cdot (3 + 1) - 1 = 4 \cdot 3 + 4^k - 1 =$

$a^{k+1} = a^k \cdot a$

d^{le} d^{le} 3
 $\Rightarrow$ dostal jsem 3
 (m^ože čísla d^{le} 3)
 - viz b)

dostanu
 1. $4^k - 1$ a m^ohradím k^{te} $V(k)$
 100

$= 3(4^k + u) = 3v$
 $n \in \mathbb{N}$ c^{et}l.

b) $\forall m \in \mathbb{N}: 5 \mid (2^{4m+3} - 3)$

1. $m=1$ $5 \mid (2^{4+3} - 3)$, tj. $5 \mid (2^7 - 3)$, tj. $5 \mid 128 - 3$ $5 \mid 125$ pl. $V(1)$ pl.

2. dok., že pro $\forall k \in \mathbb{N}: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

podívám $5 \mid (2^{4k+3} - 3)$, tj. $\exists m \in \mathbb{N}: 2^{4k+3} - 3 = 5m$ předp. že $V(k)$ pl.

pak $5 \mid [2^{4(k+1)+3} - 3]$, tj. $\exists n \in \mathbb{N}: 2^{4(k+1)+3} - 3 = 5n$ dok., že $V(k+1)$ pl.

$$\begin{aligned} L &= 2^{4(k+1)+3} - 3 = 2^{(4k+4)+3} - 3 = 2^{4k+3} \cdot 2^4 - 3 = 2^{4k+3} \cdot 16 - 3 = \\ &= 2^{4k+3} (15 + 1) - 3 = 2^{4k+3} \cdot 15 + 2^{4k+3} - 3 = 2^{4k+3} \cdot 15 + 5m - \\ &= 5(2^{4k+3} \cdot 3 + m) = 5n \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{dod.} \end{aligned}$$

④ dokážu, že

a) $\forall m \in \mathbb{N}: 2^m > m$

1. dok. pro $m=1$ $2^1 > 1$ $V(1)$ pl.

2. dok., že $\forall k \in \mathbb{N}: V(k) \Rightarrow V(k+1)$

podívám platí $V(k)$, tj. $2^k > k$ předp. že $V(k)$ pl.

pak platí $V(k+1)$, tj. $2^{k+1} > k+1$ dok., že pl. $V(k+1)$

$V(k): 2^k > k$ i.2. $V(k+1): 2^{k+1} > k+1$

$2 \cdot 2^k > 2k$ $2 \cdot 2^k > k+1$

$2 \cdot 2^k > k+k$ přeměním

platí, že $2 \cdot 2^k > k+k$, tím spíš je $2 \cdot 2^k > k+1$
tedy $V(k+1)$ platí

b) $\forall m > 1, m \in \mathbb{N}: 2^m > m+1$
[$m_0 = 2$]

1. dok. pro $m = m_0 = 2$ $2^2 > 2+1$ $4 > 3$ $V(2)$ platí

2. dok. pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$: podívám platí $V(k)$, pak platí $V(k+1)$

předp. platnost $V(k)$ a dokaz. platnost $V(k+1)$

předp. $V(k): 2^k > k+1$ i.2. $V(k+1): 2^{k+1} > k+2$

platí $2 \cdot 2^k > 2k+2$ $2 \cdot 2^k > k+2$

$2 \cdot 2^k > k+2+k$

platí, že $2 \cdot 2^k > k+2+k$, tím spíš platí,

že $2 \cdot 2^k > k+2$
 $\Rightarrow V(k+1)$ pl. m menší číslo než $k+2+k$ ($k \in \mathbb{N}$)
dod.

⑧ Докажи, что

a) m průměr procházejících 1 bodem dělí rovinnu na 2m částí

1. $m = m_0 = 1$ (první) 1 př. dle' normy na $p_j = 2,1$ čísl' VII) př.

2. dok., nř pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m_0$:

jestliže platí $V(k)$, pak platí $V(k+1)$

- pro $n = k \dots p_k = 2k$ prüfe, ob $V(k)$ pl.

pał pro $m = k+1$ ji $\underbrace{p_{k+1}}_1 = \underbrace{2(k+1)}_p$ cäbül

$$L = p_{k+1} = \underbrace{p_{k+1} + 2}_{\text{odd}} = 2k + 2 = 2(k+1) = P$$

odrozu' mlaku
mi (*)

~~prima~~
 $\Rightarrow p_1 = 2$ cãsti

~~X~~ 2. primdy
 $n_2 = 4$
 $n_2 = n_1 + 2$

3 primary
 $p_3 = 6$
 $p_3 = p_2 + 2$
 abd.

$$p_{k+1} = p_k + 2 \quad (*)$$

b) pro součet mřížových úhlů v konkrétním m-úhelníku platí:

$$\beta_m = 180^\circ (n-2)$$

najmenší n -úhelník $\Rightarrow$ trojúhelník, tj. $n=3$ a $\alpha_3=180^\circ$

1. $n = n_0 = 3$ $A_3 = 180^\circ$ $A_3 = 180^\circ / (3-2) = 180^\circ$

V(3) pl.

2. dob. pro $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 3: V(k) \Rightarrow V(k+1)$, tj:

přidp, kč platí $V(k) : \underline{S_k = 180^\circ(k-2)}$

a dok. při pl. $V(k+1)$: $\underbrace{s_{k+1}}_L = \underbrace{180^\circ(k-1)}_{(R-2+1)}$

$$L = S_{k+1} = \underbrace{S_k + 180^\circ}_{k(x)} = \underbrace{180^\circ(k-2)}_{\text{Exterior angle } = 180^\circ} + 180^\circ = 180^\circ(k-2+1) = 180^\circ(k-1) = D \quad \text{cbol.}$$

! plate' per $n \geq 3, m \in \mathbb{N}$



čtyřlístek, tj. $n=4$

$$A_4 = 180^\circ + 180^\circ = A_3 + 180^\circ$$

petiúhulník, tj. $m=5$

$$A_5 = A_4 + 180^\circ$$

$$S_{k+1} = S_k + 180^\circ (*)$$

c) každý konvenční n -úhelník má $\frac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček

3. úhel má normá úhl.

4 ušlechť  $p_{1/2} = 2 \text{ (úhl.)}$

5th level  $p_5 = 5$
 $p_5 = p_4 + 3$

6 ústředů  $\mu_6 = \mu_5 + 4$

7 ribonůl  $p_7 = p_6 + 5$

$$p_{m+1} = p_m + (m-1) \quad (*)$$

1. $m_0 = 4$ $p_4 = 2$ $p_4 = \frac{4(4-3)}{2} = 2$ $V(4)$ pl.

2. dok., ki $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 4 : V(k) \Rightarrow V(k+1)$, y:

podliski $p_k = \frac{k(k-3)}{2}$, $k=1-3$ předp. 28 Vkl.
pl.

$$p_k \cdot p_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} \quad \text{doh. n\u00e9 pl } V(k+1)$$

$$\begin{aligned} L &= P_{k+1} = P_k + (k-1) = \frac{k(k-3)}{2} + (k-1) \\ &= \frac{k(k-3) + 2(k-1)}{2} = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \\ &= \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} = P_{\text{obj.}} \end{aligned}$$